Capitolo 7: Ragionamento Probabilistico

Finora non abbiamo mai ragionato sul fatto che molto spesso l’ambiente nella quale stiamo agendo è dinamico e cambia col tempo. Se ad esempio avessimo un paziente che soffre di diabete avremo che il tasso di zucchero nel sangue varia a seconda di cosa mangia e di conseguenza andrebbe tarata la dose di insulina, questo è un problema dinamico. In generale andiamo ad inserire, in questa sezione, proprio il fattore tempo nei nostri ragionamenti:

Tempo e Incertezza

Facciamo le seguenti assunzioni:

Lavoriamo con modelli a tempo discreto, in cui il mondo è visto come una serie di istantanee o intervalli di tempo.

Si presuppone che l’intervallo di tempo ∆ tra gli stati sia lo stesso per ogni intervallo.

Xt: insieme delle variabili di stato al tempo t, ipotizzate essere inosservabili.

Et: insieme delle variabili di evidenza osservabili.

L’osservazione al tempo t è Et = et

Modelli di Transizione:

È possibile definire e poi sfruttare i modelli di transizione, che ci dicono come passare da uno stato ad un altro in base agli stati precedenti (ok, ma QUANTI stati precedenti? ce ne sono infiniti..)

Ipotesi di Markov: lo stato corrente dipende da un numero limitato di stati precedenti.

Processo di Markov del 1° Ordine: metodologia più semplice, lo stato corrente dipende solo dallo stato immediatamente precedente: P(Xt|Xo:t-1) = P(Xt|Xt-1)

Processo di Markov del 2° Ordine: utilizzo due stati precedenti P(Xt|Xo:t-1) = P(Xt|Xt-2, Xt-1) e così via…

In questo modello ipotizziamo per semplicità che le modifiche dello stato siano causate da un processo omogeneo rispetto al tempo.

Il Modello Sensoriale: si occupa di definire ciò che percepisce, anche questo modello studiato da Markov, si basa sull’ipotesi di Markov Sensoriale: P(Et|X0:t,E1:t-1) = P(Et|Xt) ovvero dato Xt, le prove osservate Et associate ad esso sono indipendenti da qualsiasi altro stato.

Ricordando l’indipendenza condizionale di Chain e Forks, possiamo tradurre la struttura degli stati in una chain con alcuni fork in corrispondenza di alcuni stati e le loro evidenze.

Full Joint Distribution con Assunzioni Markov del Primo Ordine:

Con queste assunzioni possiamo ricavarci una determinata distribuzione congiunta di probabilità. Data la distribuzione di probabilità a priori al tempo 0, ovvero P(X0), la distribuzione congiunta completa è:

L’ipotesi di Markov del primo ordine dice che le variabili di stato contengono tutte le informazioni necessarie per caratterizzare la distribuzione di probabilità per il successivo intervallo di tempo.

Ci possono essere alcuni metodi per migliorare l’accuratezza dell’approssimazione della distribuzione:

Aumentare l’Ordine della modalità del processo di Markov.

Aumentare l’insieme di stati variabili.

Es: Mondo dell’Ombrello: immagina di essere imprigionato in un seminterrato senza finestre, puoi vedere solo se la guardia porta o meno un ombrello. Possiamo derivare un processo di Markov del 1° Ordine: si assume che la probabilità di pioggia dipenda solo dal fatto che abbia piovuto o meno il giorno prima.

Deriviamo la seguente rete b. e distribuzioni condizionali:

Il modello di transizione è P(Raint| Raint-1) (Probabilità che piova dato che ieri ha piovuto.

Il modello sensoriale è P(Umbrellat| Raint) (Probabilità ombrello dato che oggi ha piovuto.

Inferenza tra i modelli temporali:

Filtraggio o stima dello stato: calcola lo stato credenza P(Xt|e1:t), ovvero la sua distribuzione a posteriori sullo stato più recente. Nel caso dell’ombrello, vorrebbe dire calcolare la probabilità che oggi stia piovendo, tenendo conto di tutte le osservazioni fatte fin qui sull’ombrello.

Predizione: calcolo della distribuzione a posteriori dello stato futuro, P(Xt+k|e1:t) per k>0. Ad esempio sapere se potrebbe piovere fra 3 giorni date tutte le osservazioni sull’ombrello.

Smoothing o regolarizzazione: calcolo della distribuzione a posteriori di uno stato passato, P(Xk|e1:t) per 0<k<t. Ad esempio calcolare la probabilità che abbia piovuto nei giorni scorsi date tutte le osservazioni.

Spiegazione più probabile: date delle osservazioni possiamo trovare la sequenza di stati che è più probabile le abbia generate, argmaxx 1:tP(x1:t|e1:t). Per esempio se l’ombrello appare nei primi 3 giorni e non nel quarto la spiegazione più probabile è che abbia piovuto nei primi 3 giorni e non nel quarto. Metodo molto utile per ricostruzione di stringe e voice detection.

Apprendimento: se non è noto né il modello sensoriale né quello di transizione essi possono essere appresi a partire dalle osservazioni.

Filtraggio e Predizione

Dato il risultato del filtraggio fino al tempo t, l’agente deve calcolare il risultato per t+1 a partire dalla nuova evidenza et+1, perciò: P(Xt+1|e1:t+1) = f(et+1, P(Xt|e1:t)) per qualche funzione f. Questo processo viene chiamato Stima Ricorsiva. In pratica aggiornare le probabilità allo stato t+1 dopo l’ultima evidenza et+1.

L’elaborazione avviene in due fasi:

Prima si proietta in avanti la distribuzione dello stato corrente da t a t+1

Quindi la si aggiorna in base alla nuova evidenza et+1

Ora inseriamo la predizione a un passo P(Xt+1|e1:t) ottenuta tramite condizionamento sullo stato Xt:

Prendendo come esempio l’ombrello, il processo di filtraggio si comporterà cosi:

Il giorno 0 non abbiamo osservazioni, supponiamo P(R0) = <0.5, 0,5>

Il giorno 1 appare l’ombrello, U1 = true, la predizione da t=0 a t=1 è:

Il passo di aggiornamento non farà altro che moltiplicare per la probabilità dell’evidenze e normalizzare:

Il giorno 2 l’ombrello compare, U2 = true, la predizione da t=1 a t=2 è:

Smoothing: calcola la distribuzione a posteriori di uno stato passato, date le evidenze fino al presente;

Nella pratica calcola P(Xk|e1:t) per 0<k<t .

Possiamo suddividere il calcolo in due parti, le evidenze fino a k e da k+1 a t:

Dove × rappresenta la moltiplicazione puntuale tra vettori, componente per componente.

I messaggi “all’indietro” bk1+:t possono essere calcolati ricorsivamente da t.

Applicandolo all'esempio dell'ombrello, risulta: P(R1|u1, u2) = αP(R1|u1)P(u2|R1)

Dal processo di filtraggio in avanti abbiamo che la prima parte sarà uguale a ⟨0.818, 0.182⟩ , mentre la seconda parte

Memorizzare e riutilizzare i risultati della fase di filtraggio rende l’algoritmo di tipo forward-backward dove la complessità è ridotta a O(t)